

Contrôle Intermédiaire : Barème

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Exercice 1 [4 points]

1. Définissez la convergence uniforme d'une **suite** de fonctions $(f_n)_n$ définie sur un domaine D vers une fonction f .
2. Est-ce que la suite donnée pour $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = \cos(nx) / \ln(1 + nx), \quad x \in]0, 1]$$

converge simplement ? Si oui, donner la limite.

3. Cette même suite converge-t-elle uniformément ?

Barème :

1. 1 pt : 0 si confusion série-suite.
2. 1 pt : noter sévère.
3. 2 pt : OK si rédaction rapide tant que l'idée de $1/n$ est là.

Erreurs fréquemment commises :

- 1.

Exercice 2 [6 points] Pour les **séries** de fonctions données par le terme général suivant pour $n \geq 1$, dites si elles convergent simplement ? uniformément ? normalement ?

1. $a_n(x) = \sin(nx) / n^2 x^2, \quad x \in]0, 1]$.
2. $b_n(x) = \sin(n^2 x) / n^2, \quad x \in [0, +\infty[$.
3. $c_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x^2}, \quad x \in]0, 1]$.
4. $d_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x^2}, \quad x \in [1, 2]$.

Barème :

1. 2 pt : 1 pour CV simple, 1 pour pas de CV uniforme donc pas de CV normale.
2. 1 pt.
3. 2 pt : 1 pour CV simple, 1 pour pas de CV uniforme donc pas de CV normale.
4. 1 pt.

Erreurs fréquemment commises :

- 1.

Partie II (à rédiger sur une deuxième copie)

Exercice 3 [3 points] Calculer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) e^{-x}.$$

Barème :

1. 1 pt : noter sévère, exo très standard.
2. 2 pt : tolérant si rédaction rapide, zéro tolérance si confusion zéro-infini.

Erreurs fréquemment commises :

1.

Exercice 4 [3 points] Dire si les **suites numériques** données par le terme général suivant ($n \geq 1$) convergent. Si oui, donner la limite.

1. $a_n = \cos(\pi n^2)$.
2. $b_n = 2n(1 - \cos(1/\sqrt{n}))$.
3. $c_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$.

Barème :

1. 1 pt : 0.5 si idée générale comprise mais erreur de calcul.
2. 1 pt : OK si rédaction rapide.
3. 1 pt : OK si rédaction rapide.

Erreurs fréquemment commises :

1.

Exercice 5 [4 points] Dire si les **séries numériques** données par le terme général suivant ($n \geq 1$) convergent.

1. $u_n = \sin(\sin(1/n))$.
2. $v_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$.

Barème :

1. 1.5 pt.
2. 2.5 pt.

Erreurs fréquemment commises :

1.